4ème Tec+Science

Série Révision N°1

" Fonctions Logarithmes+Exponentielles. "

EXERCICE N°1 :

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

1/ Une primitive sur IR de la fonction $x \longrightarrow \dfrac{x}{x^2+1}$ est :

u➢ $x \longrightarrow 2\ln(x^2+1)$ s➢ $x \longrightarrow \ln(x^2+1)$ m➢ $x \longrightarrow \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$

2/ La limite de la fonction : $x \longrightarrow x\ln(1+\dfrac{1}{x})$ lorsque x tend vers $+\infty$ est :

u➢ 0 s➢ $+\infty$ m➢ 1

3/ Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de ξ, la droite Δ : $\begin{cases} x = 2\alpha - 1 \\ y = 3\alpha + 2 \\ z = -\alpha + 5 \end{cases}$, $\alpha \in IR$

et un plan P : $x - 2y + 3z - 3 = 0$ alors :

u➢ $\Delta \subset P$ s➢ $\Delta \cap P = \varnothing$ m➢ $\Delta \cap P = \{A(1,5,4)\}$

4/ Une primitive de la fonction $f(x) = \ln x$ sur $]0,+\infty[$ est $F(x) =$:

u➢ $x\ln x + x$ s➢ $x - \ln(x+1)$ m➢ $x\ln x - x + 3$

5/ Soit A(-1,2,1) et le plan P d'équation : $2x + y - 2z - 1 = 0$ on a d(A,P) =

u➢ -1 s➢ 0 m➢ 1

6/ L'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tel que $x^2+y^2+z^2 - 4x + 2z + 5 = 0$ est :

u➢ Vide s➢ une sphère m➢ un point

EXERCICE N°2 :

On considère la fonction f dont la courbe représentative C est représentée ci-contre dans le plan muni d'un repère orthogonal.

f est définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$.On note f ' la fonction dérivée de f.

Les droites d'équations $x = 0$ et $y = -x+2$ sont les asymptote de (C).

1) Sans justifier et par lecture graphique déterminer :

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+ x- 2$

b) Dresser le tableau de variation de f.

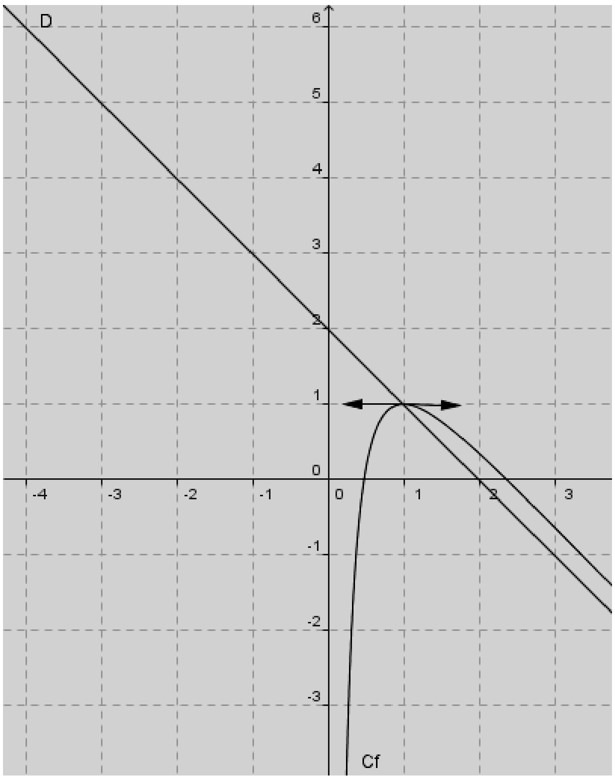
2) On admet que la fonction précédente est définie pour tout x de $]0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = a x + b + \dfrac{\ln x}{x}$ où a et b sont deux réels.

a) Montrer que $f'(x) = a + \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

b) Déterminer graphiquement f(1) et f '(1).

c) En déduire que $f(x) = -x + 2 + \dfrac{\ln x}{x}$.



EXERCICE N°3 :

1) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : g(x) = x – 3 + lnx.

a) Etudier les variations de g.

b) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α dans $]0;+\infty[$.
et vérifier que $2 < \alpha < 2.5$.

c) Etudier le signe de g sur $]0;+\infty[$.

2) Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$.on appelle (C) sa courbe dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ "unité graphique 2 cm"

3) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

b) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

4) a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que $f(\alpha) = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$.

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

c) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de (C) avec l'axe des abscisses

d) Etudier le signe de $f(x)$.

5) Tracer (C).

6) Soit la fonction H définie sur $]0;+\infty[$ par : $H(x) = x\ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$

a) Montrer que $H'(x) = f(x) + 3 - \frac{2}{x}$.

b) En déduire une primitive F de f sur $]0;+\infty[$.

c) Calculer : $F(1) - F(e^2)$

EXERCICE N°4 :

Soit la fonction f définie par : f(x) = $\ln(x+2) + \frac{x}{x+2}$; x > -2

On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1) a- Vérifier que pour tout $x \in]-2,+\infty[$, on a : f'(x) = $\frac{x+4}{(x+2)^2}$

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.

2) Soit g la fonction définie sur $]-2,+\infty[$ par : g(x) = f(x) – x

a- Dresser le tableau de variation de g.

b- Montrer que l'équation g(x) = 0 admet dans $]-2,+\infty[$ deux solutions -1 et α
et que 1.8 <α< 2.

c- En déduire la position relative de ζ_f et de la droite Δ d'équation y = x.

3) a- Tracer Δ et ζ_f , on tracera la tangente T à ζ_f au point d'abscisse 0.

b- Tracer dans le même repère la courbe ζ' de la fonction f^{-1}.

EXERCICE N°5 :

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[\setminus\{1\}$ par : $\begin{cases} f(x) = x+1-\dfrac{1}{\ln x} & \text{si } x>0 \text{ et } x\neq 1 \\ f(0)=1 \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

2) a- Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[\setminus\{1\}$; $f'(x) = 1+\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$

b- Dresser le tableau de variation de f.

3) a- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une seule solution α et que 1.49 <α< 1.5

b- Monter que $f'(\alpha) = \dfrac{\alpha^2+3\alpha+1}{\alpha}$.

4) a- Donner une équation de la tangente (T) à ζ_f au point d'abscisse e.

b- déterminer les coordonnées du point A intersection de (T) avec l'axe $(o,\vec{j})$.

5) a- Montrer que la droite D : y = x + 1 est une asymptote oblique à ζ_f .

b- Tracer D , (T) et ζ_f .

EXERCICE N°6 :

A/1) Soit la fonction f définie sur]-3/2,+∞[par f(x) = -x + ln(2x + 3).

a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Etudier les positions relatives de ζ_f et de la droite D : y = -x.

c- Montrer que ζ_f admet une branche parabolique de direction celle de D.

d- Construire ζ_f et D.

2) Montrer que $F(x) = -\dfrac{x^2}{2}-x-\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{2x+3}{2}\right)\ln(2x+3)$ est une primitive de f.

B/ Soit la fonction g définie sur [-1,+∞[par $g(x) = e^{f(x)}$.

1) a- Démontrer que pour tout x ∈ [-1,+∞[, on a : $g(x) = (2x + 3)e^{-x}$.

b- Dresser le tableau de variation de g.

c- Donner l'équation de la tangente T à ζ_g au point d'abscisse 0.

d- Construire dans un repère $(0,\vec{u},\vec{v})$ la courbe ζ_g et T.

2) Pour tout x ∈ [0,+∞[, on pose h(x) = g(x) – x.

a- Dresser le tableau de variation de la fonction h.

b- Montrer que l'équation h(x) = 0 admet une solution unique α, vérifier que 1.25<α<1.5

c- Construire la droite Δ : y = x dans le repère $(0,\vec{u},\vec{v})$ interpréter graphiquement α.

3) Soit φ la restriction de g à [-1/2,+∞[.

a- Démontrer que φ réalise une bijection de [-1/2,+∞[sur J que l'on déterminera.

b- Soit φ^{-1} la fonction réciproque de φ.

Montrer que φ^{-1} est dérivable en 3 et calculer $(\varphi^{-1})'(3)$

4ème *Tec+Science*

Série Révision N°2

" Fonctions Logarithmes+Exponentielles. "

$\forall\ x\in IR,\ e^x > 0$	$\ln e^x = x$ et $e^{\ln x} = x$	$e^0 = 1$	$(e^x)' = e^x$
$e^{x+y} = e^x.e^y$	$e^{x-y} = e^x/e^y$	$e^{-x} = 1/e^x$	$(e^x)^n = e^{nx}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$	$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0, \forall x\in IN$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty, \forall r\in Q_+$	$\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$	$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$

EXERCICE N°1 :

I) Résoudre dans IR les équations suivantes :

• $e^x - 4 = 0$ • $e^x + 5 = 0$ • $e^{3x} - e^x = 0$ • $e^{-x^2+4x-3} = 1$ • $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$

II) Etudier le signe de f(x) dans chacun des cas suivants :

• $f(x) = e^x - 5$ • $g(x) = e^{2x} - 5e^x + 6$ • $h(x) = \frac{e^x - 3}{e^x - 1}$

III) Calculer la limite de f dans chacun des cas suivants :

• $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - 3x$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x} - 3e^x$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} 6xe^{-x}$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x}$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}-1}{x}$ • $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}$ • $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(e^x+1)}{e^x}$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - 2x^2}{x+4}$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+\frac{1}{x})^x$

EXERCICE N°2 :

On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ par :

$f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ et on nomme par ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	-	‖	-	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$-e$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

1) Justifier les éléments suivants donner par le tableau ce variations : signe de f , limites aux bornes de l'ensemble de définition, image de e^{-1} par f.(On calculera f'(x)).
2) Donner une équation de chacune des asymptotes de f.
3) a- Donner une équation de la tangente à ζ_f au point A d'abscisse 1/e.
   b- Donner une équation de la tangente à ζ_f au point B d'abscisse e.
4) Déterminer suivants les valeurs du réel k le nombre de solution de l'équation f(x) = k.

EXERCICE N°3 :

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = 1-\dfrac{2}{1+e^x}$

On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Ecrire une équation de la tangente T à ζ_f au point d'abscisse 0.

2) Soit g la fonction sur IR par : $g(x) = \dfrac{x}{2} - f(x)$

a- Montrer que pour tout $x\in$IR, $g'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

b- Etudier le sens de variation de g.

c- Calculer g(0), en déduire le signe de g(x) pour $x\in$IR.

d- Préciser la position relative de ζ_f par rapport à T. Déduire que O est un point d'inflexion.

3) Tracer ζ_f et T dans le repère $(0,\vec{i},\vec{j})$.

4) a- Montrer que f réalise une bijection de IR sur]-1,1[.

b- Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in$]-1,1[.

c- Tracer la courbe (ζ') représentation de f^{-1} .

5) a- Montrer que pour tout $x\in$IR ; $f(x) = -1+\dfrac{2e^x}{1+e^x}$

b- Déterminer une primitive de f qui s'annule en zéro.

EXERCICE N°4 :

A/ On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$.

1) Résoudre l'équation g(x) = 0. (on pose $e^x = t$).

2) Vérifier que $g(x) = (e^x - 2)(2e^x - 1)$.

3) En déduire, suivants les valeurs de x le signe de g(x).

B/ On considère la fonction f définie sur]0,+∞[par : $f(x) = 1+2x+\dfrac{e^x}{e^x-1}$

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(0,\vec{i},\vec{j})$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$.

2) a- Montrer que la droite Δ : y = 2x + 2 est une asymptote à ζ_f .

b- Préciser la position de ζ_f par rapport à Δ.

3) Montrer que $\forall\ x\in$]0,+∞[, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1-e^x)^2}$ puis dresser le tableau de variation de f.

4) Construire ζ_f et Δ dans le repère $(0,\vec{i},\vec{j})$. $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 1cm$

EXERCICE N°5 :

Soit la fonction g définie sur IR par $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$

1) a- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0$, en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

b- Dresser le tableau de variation de g.

c- Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α, vérifier que 0.3 <α <0.4

d- En déduire la signe de g.

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$.

2) a- Montrer que pour tout réel x, f'(x) = g(x)

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Montrer que la droite Δ : y = x – 1 est une asymptote à ζ_f au voisinage de +∞.

d- Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 0.

e- Tracer T, Δ et ζ_f .

3) a- Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction h définie sur IR par :

$h(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction $k(x) = (x^2 + 2)e^{-x}$.

b- En déduire la primitive F de f sur IR qui s'annule en 0.